



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

# **Wytrzymałość Elementów Maszyn**

## **Wykład Nr 1**

### **Odształcenia belek zginanych – metoda grafoanalityczna**

belka fikcyjna (belka wtórna), obciążenie fikcyjne (obciążenie wtórne), fikcyjna siła tnąca, fikcyjny moment gnący, kąt obrotu belki, ugięcie belki, warunki brzegowe, więzy belki fikcyjnej, odształcenia belek o zmiennych sztywnościach, sztywność zastępcza.




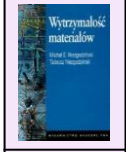




**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki  
Katedra Projektowania i Eksploatacji Maszyn**

**dr hab. inż. Tomasz Machniewicz, prof. AGH**

[machniew@agh.edu.pl](mailto:machniew@agh.edu.pl)

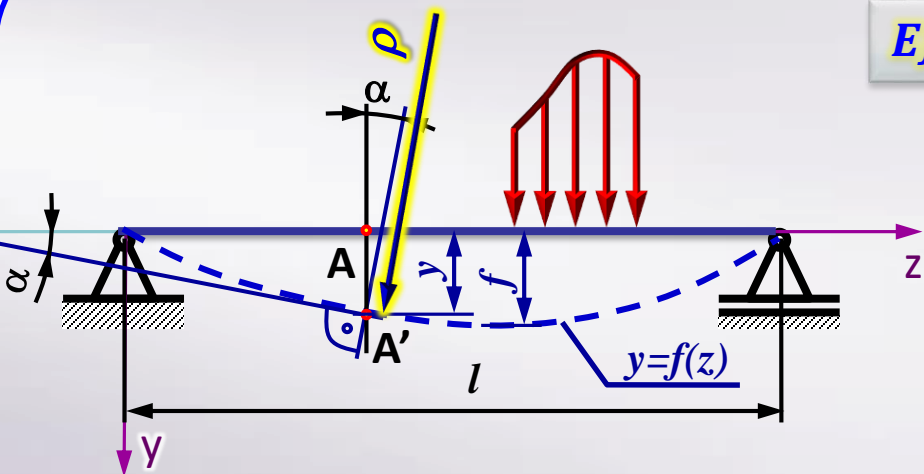
## Zalecana literatura:

- teoria, przykłady obliczeniowe, **ćwiczenia laboratoryjne**

	<p>[1] Wolny S., Siemieniec A.: Wytrzymałość materiałów. Cz. 1, Teoria, zastosowanie. AGH Uczelniane Wydaw. Naukowo-Dydaktyczne.</p>
	<p>[2] Skorupa A., Skorupa M.: Wytrzymałość materiałów: skrypt dla studentów wydziałów niemechanicznych. AGH Uczelniane Wydaw. Naukowo-Dydaktyczne, 2000.</p>
	<p>[3] Skorupa A., Skorupa M.: Wytrzymałość materiałów: wybrane zagadnienia dla mechaników. AGH Uczelniane Wydaw. Naukowo-Dydaktyczne, 2002.</p>
	<p>[4] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T.: Wytrzymałość Materiałów. Warszawa, PWN 1981.</p>
	<p>[5] Dyląg Z. Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. T. 1. WNT, Warszawa 2003. [6] Dyląg Z. Jakubowicz A., Orłoś Z.: Wytrzymałość materiałów. T. 2. WNT, Warszawa 2003.</p>
	<p>[7] Lewiński J., Piekarski R., Wawrzyniak A., Witemberg-Perzyk D.: Wytrzymałość materiałów w zadaniach. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 2009.</p>
	<p>[8] Wolny S. i in.: Wytrzymałość Materiałów – cz. IV. Ćwiczenia laboratoryjne. Wyd. AGH. Kraków 2007.</p>
	<p>[9] Wolny S. i in. Wytrzymałość Materiałów – cz. IV. Eksperyment w Wytrzymałości Materiałów.</p>

# Do powtórzenia:

## Rów. różniczkowe linii ugięcia



$$EJ\ddot{y} = -M_g(z)$$

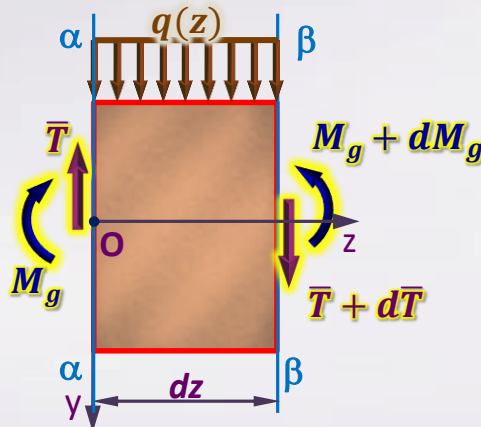
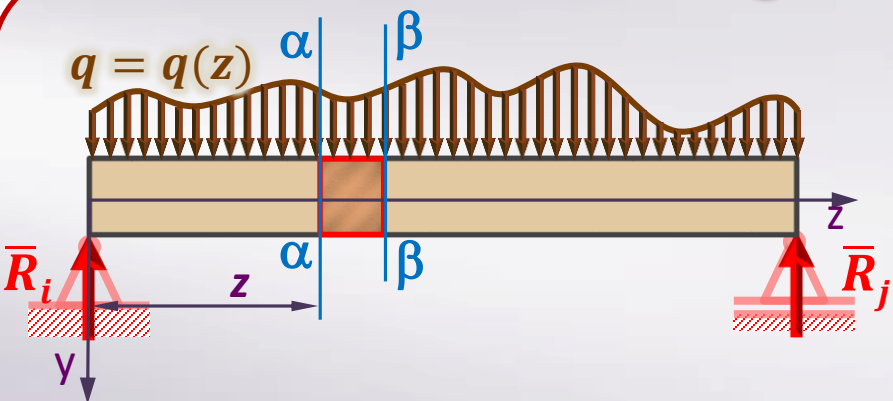
- $E$  – moduł Younga
- $J$  – moment bezwładności
- $M_g(z)$  – moment gnący

$$EJ\dot{y} = \int -M_g(z) dz + C$$

$$EJy = \iint -M_g(z) dz dz + Cz + D$$

$C, D$  – stałe całkowania, wyznaczone na podstawie warunków brzegowych

## Tw.-Schwedlera – Żurawskiego



$$q(z) = -\frac{dT}{dz}$$

$$T(z) = \frac{dM_g}{dz}$$

$$q(z) = -\frac{d^2M_g}{dz^2}$$

# 1.1. Belka rzeczywista i belka fikcyjna

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki:

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -M_g(z) \quad (1)$$

- $E$  – moduł Younga
- $J$  – moment bezwładności
- $M_g(z)$  – moment zginający
- $y$  – ugięcie belki

**Belka fikcyjna:**

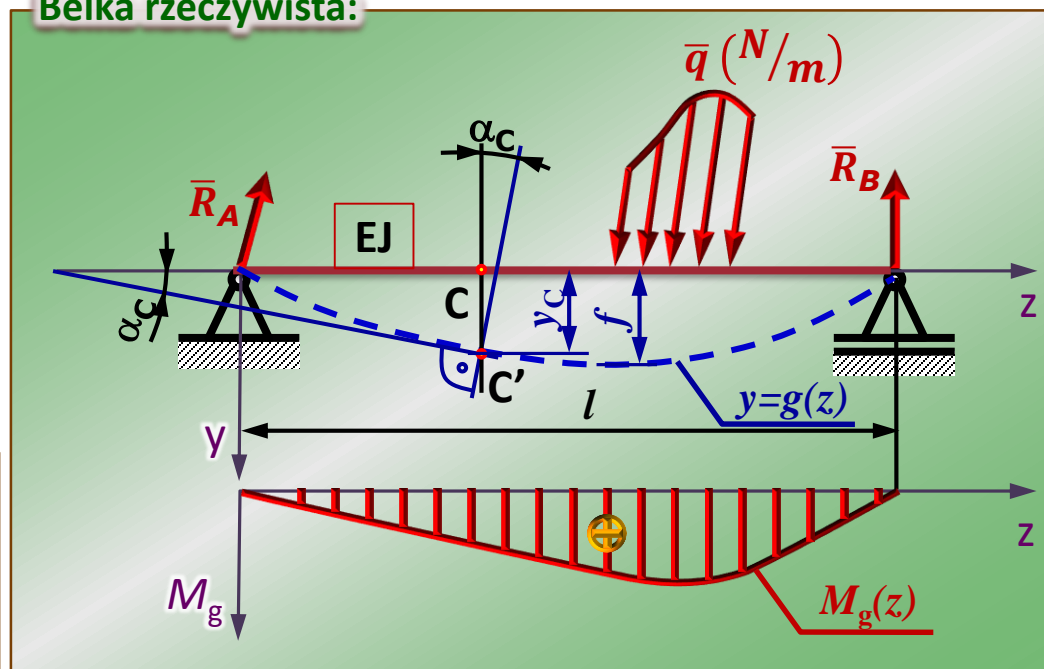
- belka o długości belki rzeczywistej,
- stałej sztywności (por. p. 1.6),
- odpowiednio utwierdzona (patrz p. 1.2),
- obciążona obciążeniem fikcyjnym (wtórnym), tj. obciążeniem ciągłym odpowiadającym rozkładowi momentu zginającego w belce rzeczywistej:

$$\tilde{q} = M_g(z).$$

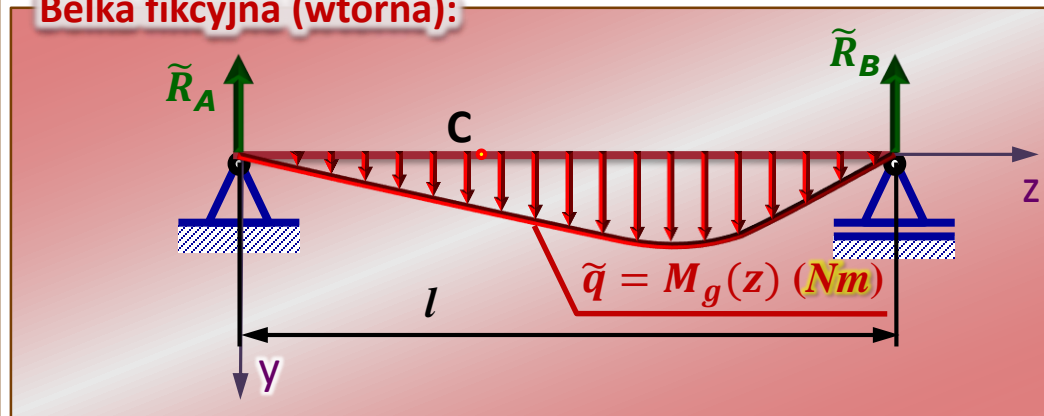
**UWAGA:**

Przy zachowaniu umowy co do znaków momentów zginających i odkształceń jak na rysunku (tj. oś  $y$  skierowana w dół) dodatni moment zginający w belce rzeczywistej obciąża belkę fikcyjną ku dołowi (zgodnie ze zwrotem osi  $y$ ).

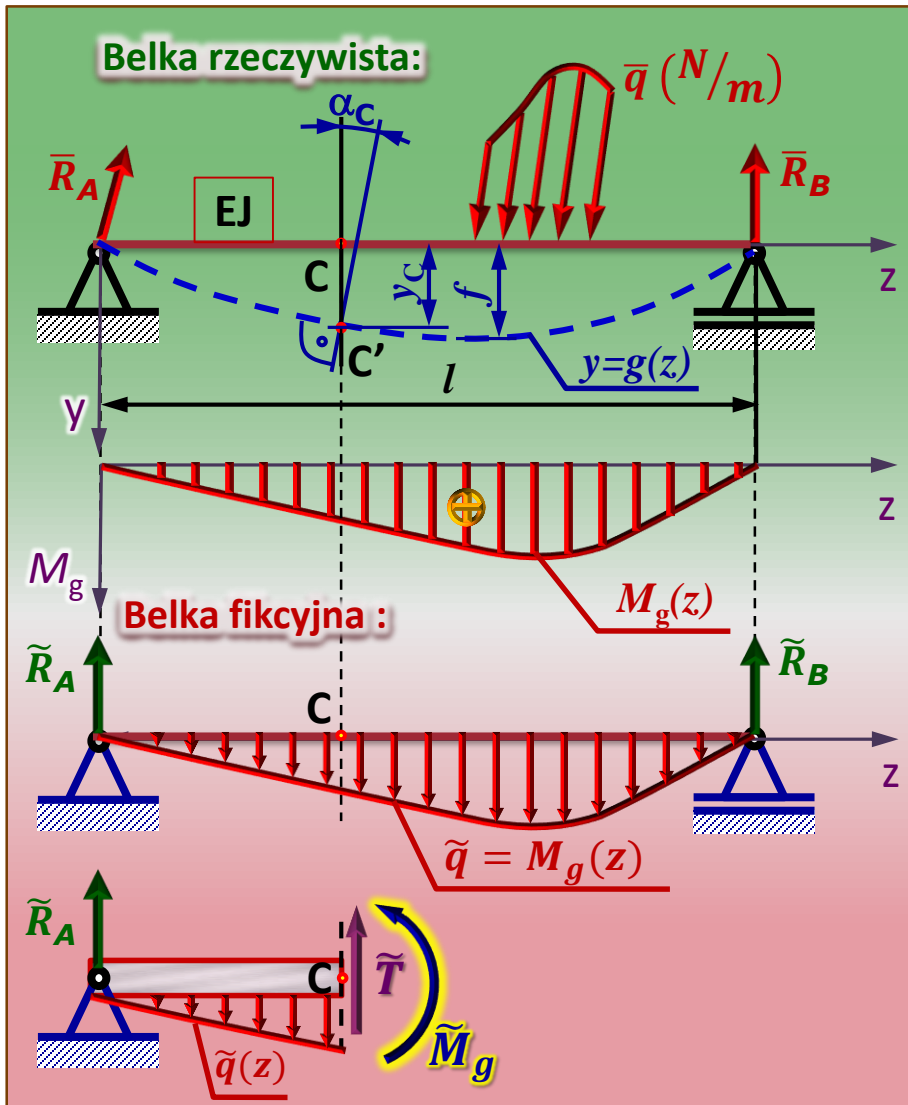
**Belka rzeczywista:**



**Belka fikcyjna (wtórna):**



# 1.1. Belka rzeczywista i belka fikcyjna



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki rzeczywistej:

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -M_g(z) \quad (1)$$

Belka fikcyjna (twierdzenie Schwedlera – Żurawskiego):

$$\tilde{q}(z) = -\frac{d\tilde{T}(z)}{dz} = -\frac{d^2 \tilde{M}_g(z)}{dz^2} \quad (2)$$

$$\text{uwzględniając: } \tilde{q}(z) = M_g(z) \quad (3)$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2 \tilde{M}_g(z)}{dz^2} = -M_g(z) \quad (4)$$

$$\hookrightarrow EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d^2 \tilde{M}_g(z)}{dz^2} \quad (5)$$

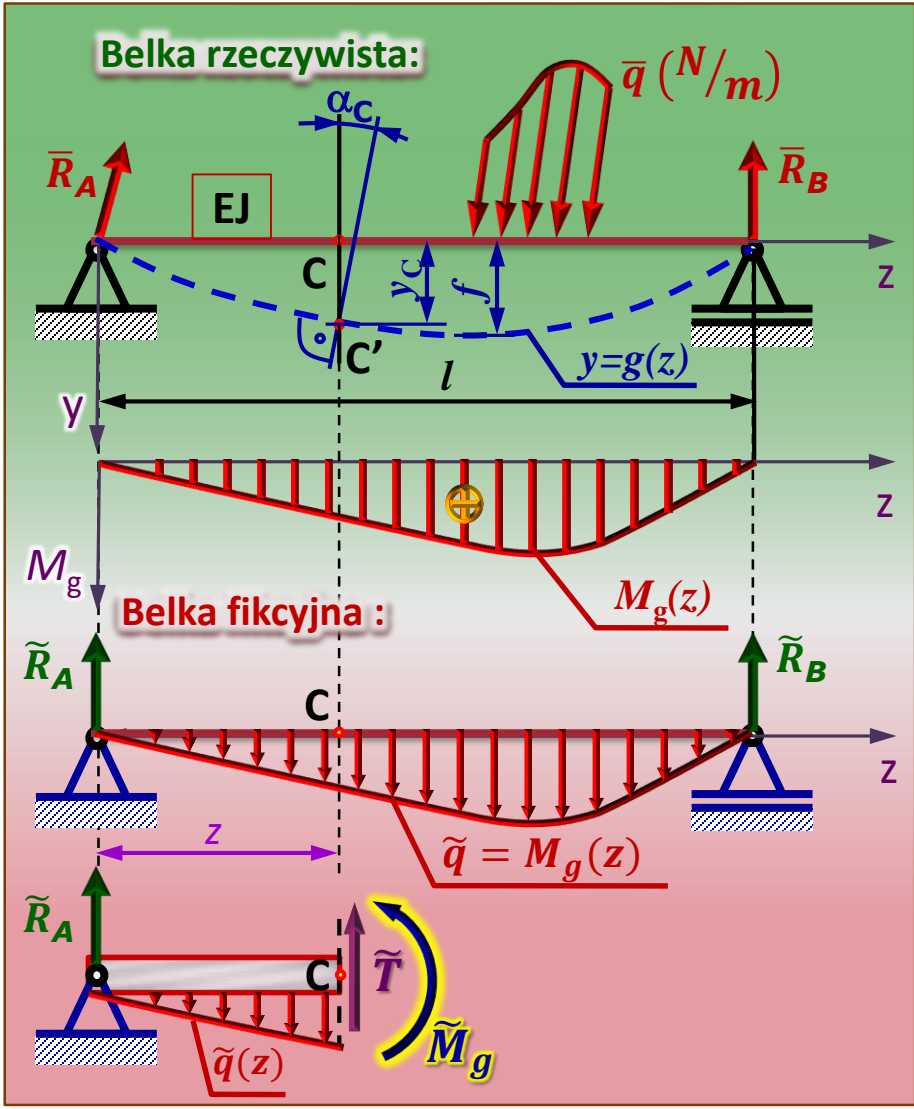
$$\text{całkując (5): } EJ \frac{dy}{dz} = \frac{d\tilde{M}_g(z)}{dz} + C = \tilde{T}(z) \quad (6)$$

$$\hookrightarrow EJ \frac{dy}{dz} = \tilde{T}(z) + C \quad (7)$$

$$\text{całkując (6): } EJy = \tilde{M}_g(z) + Cz + D \quad (8)$$



# 1.1. Belka rzeczywista i belka fikcyjna



$$EJ\dot{y} = \tilde{T}(z) + C$$

$$EJy = \tilde{M}_g(z) + Cz + D$$

1° Jeżeli zostaną odpowiednio dobrane warunki brzegowe belki fikcyjnej, tak, by stałe całkowania  $C$  i  $D$  były równe zero, tj.  $C = 0$  oraz  $D = 0$ , wówczas kąt obrotu ( $\alpha \equiv \dot{y}$ ) oraz ugięcie ( $y$ ) w dowolnym przekroju belki, będzie można obliczyć z prostych zależności:

$$\alpha_{(z)} = \frac{\tilde{T}(z)}{EJ}$$

$$y_{(z)} = \frac{\tilde{M}_g(z)}{EJ}$$

gdzie:

$\tilde{T}(z)$  – fikcyjna siła poprzeczna w danym punkcie (o współrzędnej „z”),

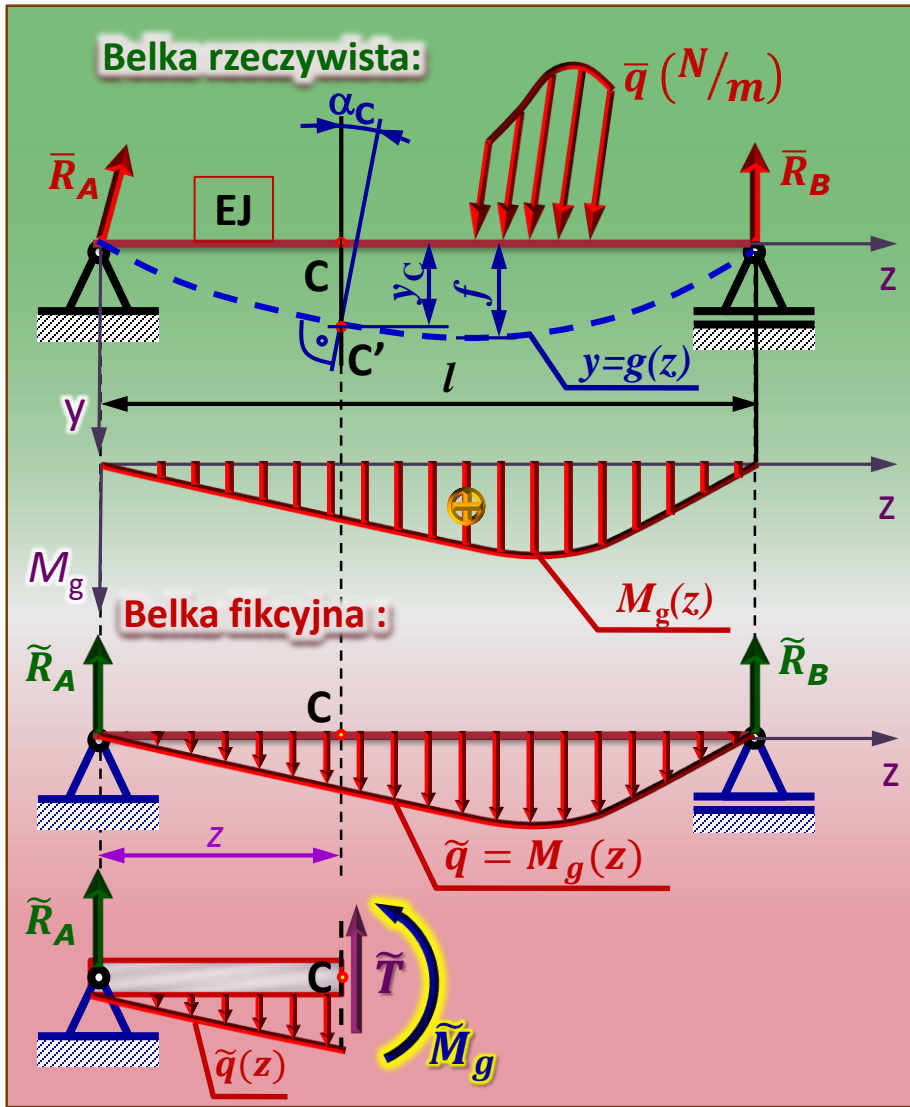
$\tilde{M}_g(z)$  – fikcyjny moment zginający w danym punkcie,

$EJ$  – sztywność (giętna) belki fikcyjnej

*Uwaga:* sztywność  $EJ$  jest stała dla całej belki fikcyjnej (nawet gdy sztywność belki rzeczywistej jest zmienna), nie jest to sztywność tylko w danym punkcie (por. p. 1.6).

Jak dobrać warunki brzegowe by spełniony był postulat 1° ...


# 1.2. Belka fikcyjna – warunki brzegowe



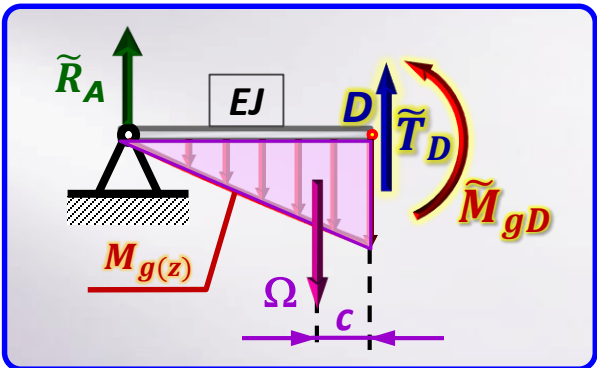
$$EJ\dot{y} = \tilde{T}(z) + C \quad \rightarrow \quad \alpha_{(z)} = \tilde{T}_{(z)}/EJ$$

$$EJy = \tilde{M}_g(z) + Cz + D \quad \rightarrow \quad y_{(z)} = \tilde{M}_g(z)/EJ$$

$$C = 0 \quad D = 0$$

Belka rzeczywista		Belka fikcyjna
$\alpha_{(z)} = 0$	$\longleftrightarrow$	$\tilde{T}_{(z)} = 0$
$y_{(z)} = 0$	$\longleftrightarrow$	$\tilde{M}_g(z) = 0$
$\alpha_A \neq 0$ $y_A = 0$		$\tilde{T}_A \neq 0$ $\tilde{M}_A = 0$ 
$\alpha_A = 0$ $y_A = 0$		$\tilde{T}_A = 0$ $\tilde{M}_A = 0$ 
$\alpha_A \neq 0$ $y_A \neq 0$		$\tilde{T}_A \neq 0$ $\tilde{M}_A \neq 0$ 
$\alpha_A \neq 0$ $y_A = 0$		$\tilde{T}_A \neq 0$ $\tilde{M}_A = 0$ 
$\alpha_A \neq 0$ $y_A \neq 0$		$\tilde{T}_A \neq 0$ $\tilde{M}_A \neq 0$ 

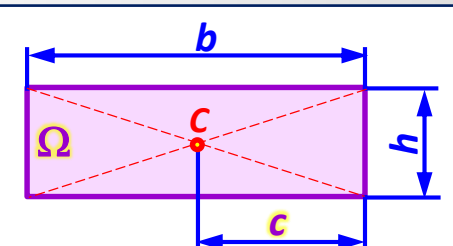
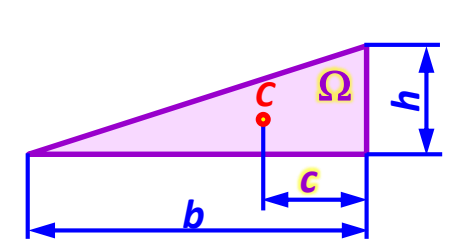
# 1.3. Zależności na pola powierzchni i środki ciężkości figur opisujących rozkłady momentów zginających

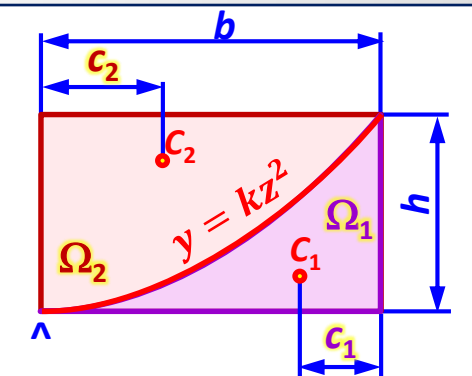
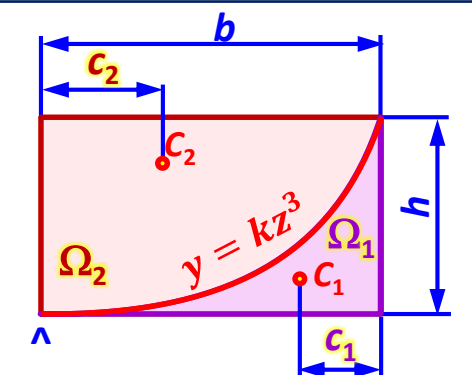


$$\alpha_D = \tilde{T}_D / EJ$$

$$y_D = \tilde{M}_{gD} / EJ$$

Wykresy momentów gnących, stanowiące obciążenie wtórne, można podzielić na proste figury geometryczne. Znajomość pól tych figur ( $\Omega$ ) i położenia ich środka ciężkości ( $c$ ) pozwala łatwo wyznaczyć fikcyjne siły wewnętrzne ( $\tilde{T}$ ,  $\tilde{M}$ ).

Szkic	$\Omega, c$
	$\Omega = bh$ $c = \frac{b}{2}$
	$\Omega = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{b}{3}$

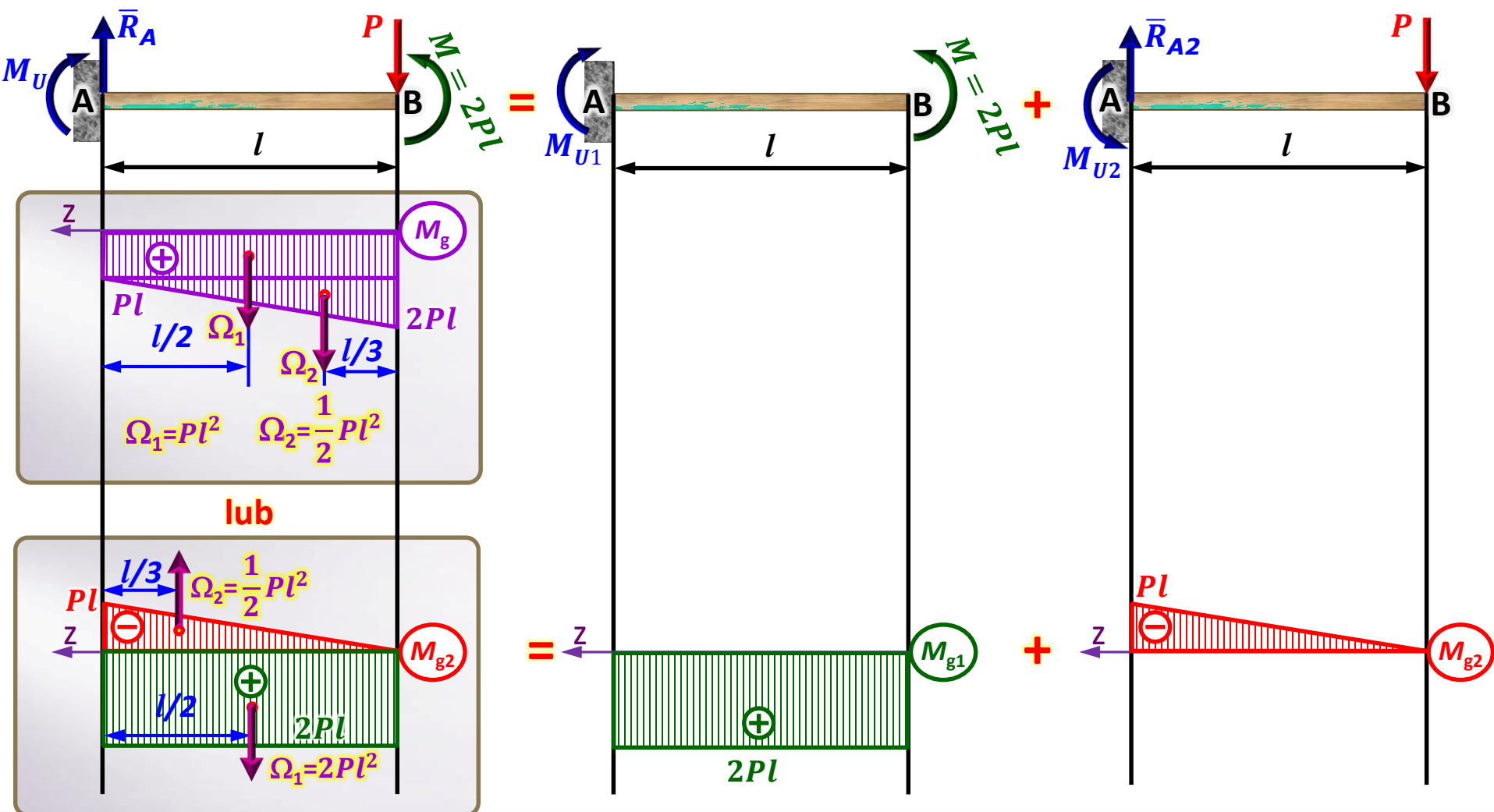
Szkic	$\Omega$	$c$
	$\Omega_2 = \frac{2bh}{3}$ $\Omega_1 = \frac{bh}{3}$	$c_2 = \frac{3b}{8}$ $c_1 = \frac{b}{4}$
	$\Omega_2 = \frac{3bh}{4}$ $\Omega_1 = \frac{bh}{4}$	$c_2 = \frac{2b}{5}$ $c_1 = \frac{b}{5}$

^ - współrzędna ekstremum funkcji



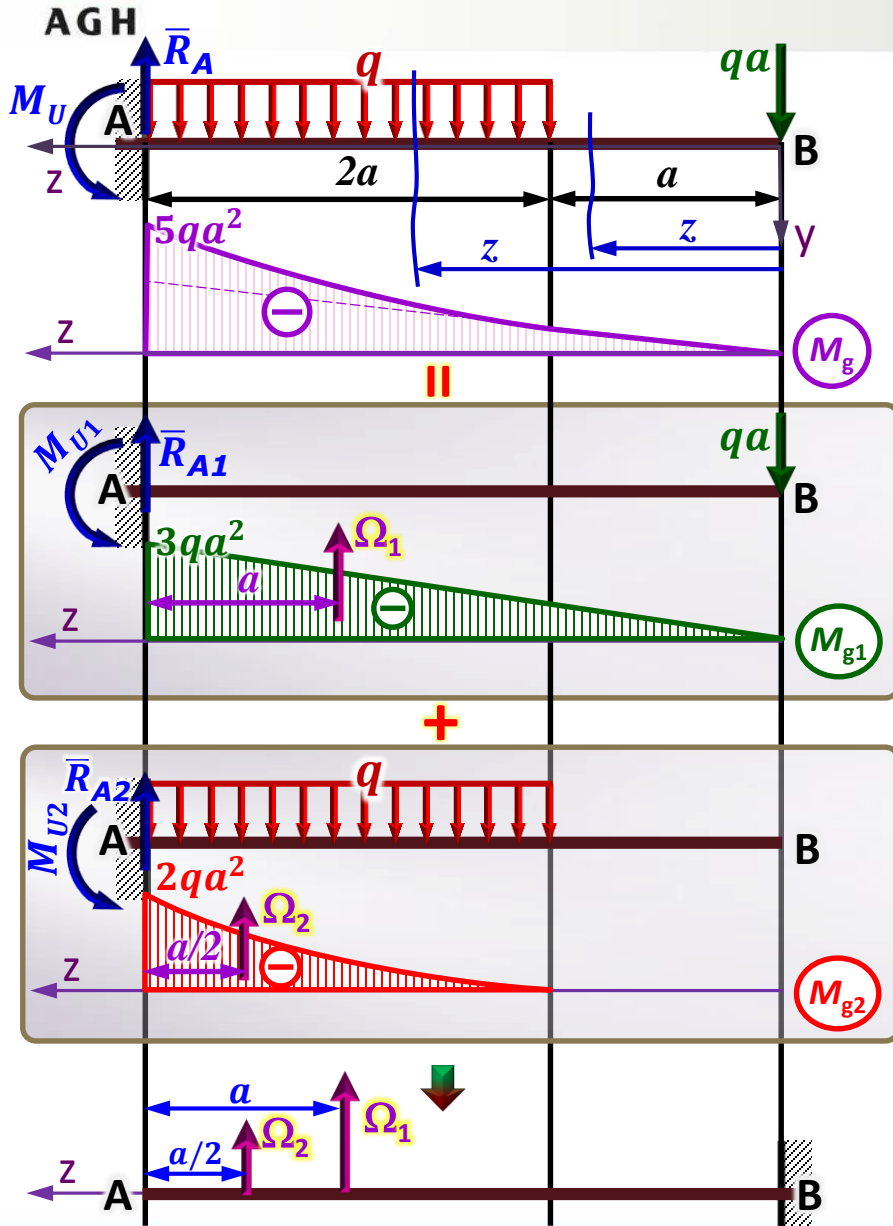
# 1.4. Wyznaczanie wypadkowych obciążeń wtórnych

**Przykład 1.1** Dane:  $P, l$





# 1.4. Wyznaczanie wypadkowych obciążeń wtórnych

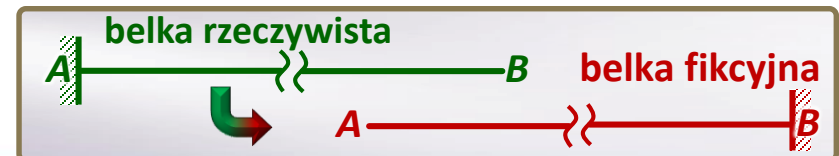
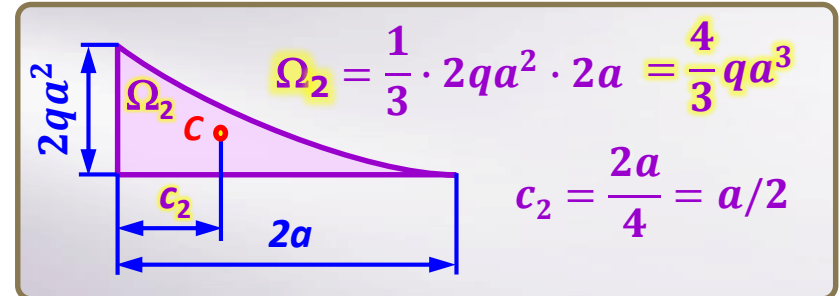
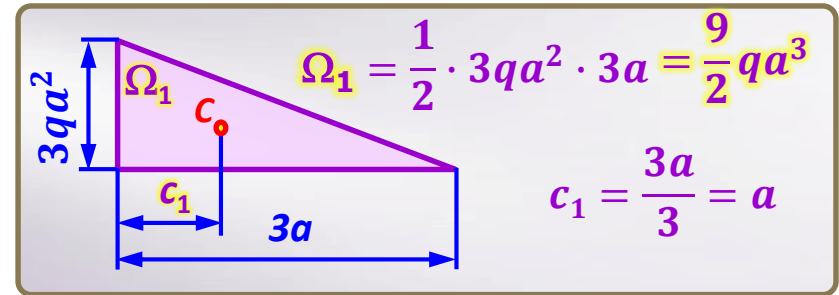


## Przykład 1.2

Dane:  $a, q$

$$0 \leq z < a: M_{g(z)} = -qaz$$

$$a \leq z \leq 3a: M_{g(z)} = -qaz - \frac{q(z-a)^2}{2}$$

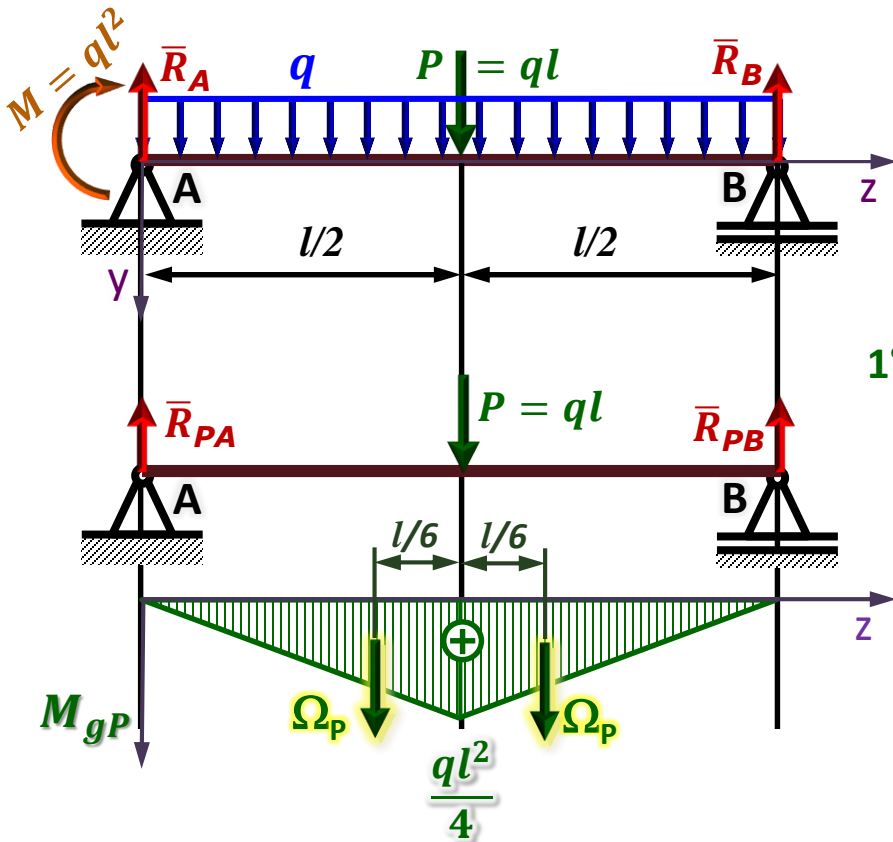


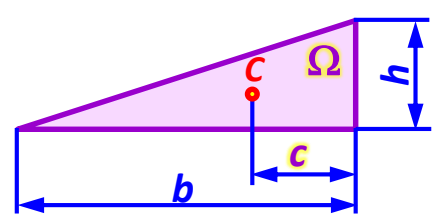
# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

## Przykład 1.3

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).

Dane:  $EJ, q, l$     Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



Szkic	$\Omega, c$
	$\Omega = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{b}{3}$

1° Momenty gnące związane z działaniem siły P:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow R_{PA} = ql \frac{l}{2} \frac{1}{l} = \frac{ql}{2}$$

$$M_{gP(l/2)} = R_{PA} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{4}$$

$$\Omega_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{4} \Rightarrow$$

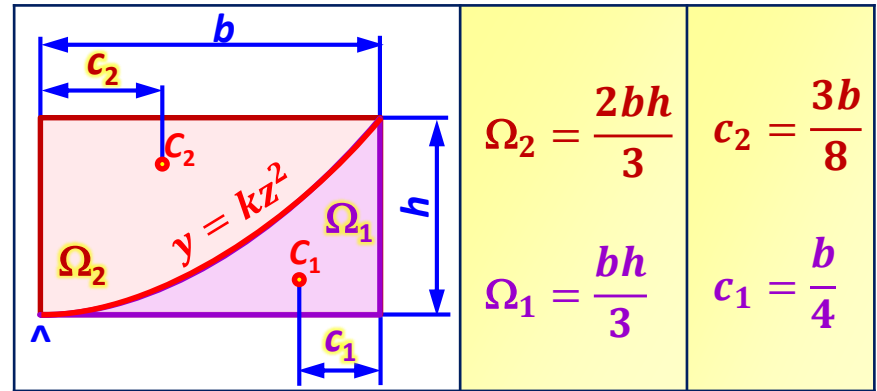
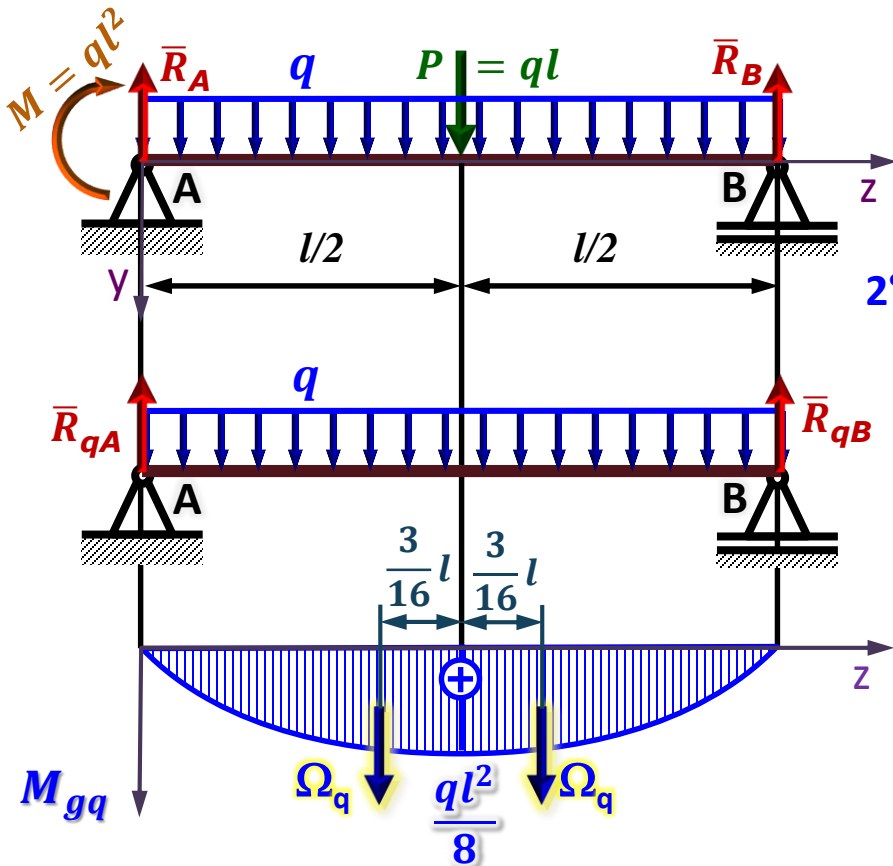
$$\Omega_p = \frac{ql^3}{16}$$

# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

## Przykład 1.3

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).

Dane:  $EJ, q, l$     Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



2° Momenty gnące związane z działaniem obciążenia  $q$ :

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow R_{qA} = ql \frac{l}{2} \frac{1}{l} = \frac{ql}{2}$$

$$M_{gq(z)} = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{qz^2}{2}$$

$$M_{gq(l/2)} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ql^2}{8}$$

$$\Omega_q = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{8}$$

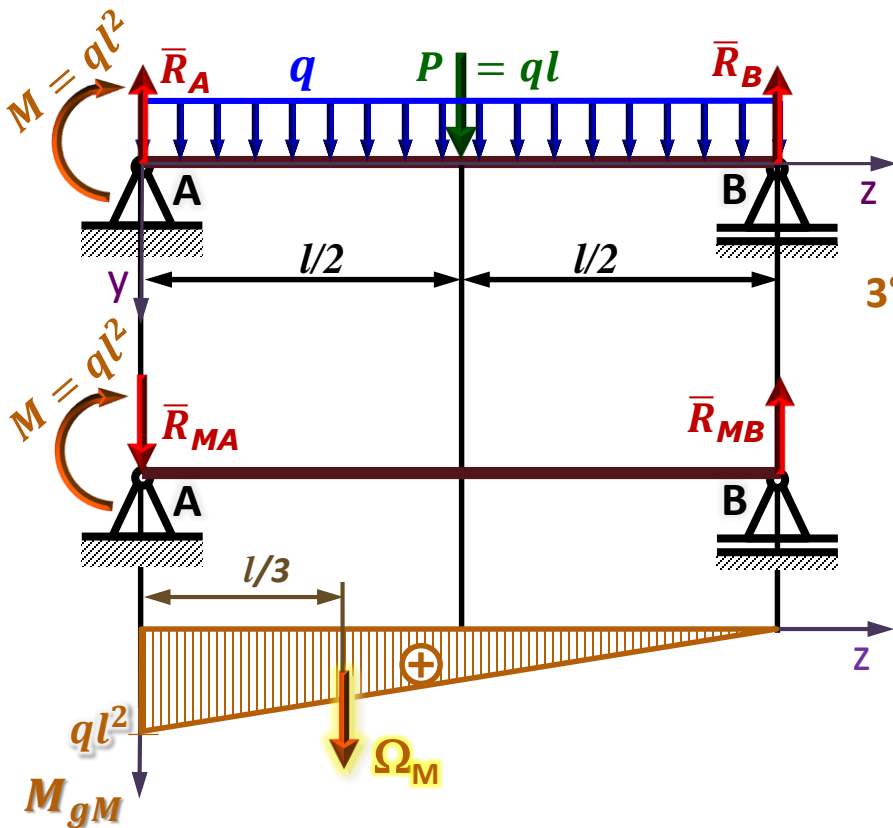
$$\boxed{\Omega_q = \frac{ql^3}{24}}$$

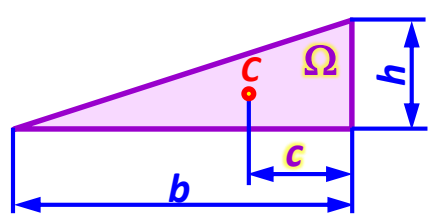
# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

## Przykład 1.3

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).

Dane:  $EJ, q, l$     Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



Szkic	$\Omega, c$
	$\Omega = \frac{bh}{2}$ $c = \frac{b}{3}$

3° Momenty gnące związane z działaniem momentu M:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow R_{MA} = ql^2 \frac{1}{l} = ql$$

$$M_{gM(z)} = ql^2 - ql \cdot z$$

$$\hookrightarrow M_{gM(z=0)} = ql^2 \quad M_{gM(z=l)} = 0$$

$$\Omega_M = \frac{1}{2} \cdot l \cdot ql^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Omega_M = \frac{ql^3}{2}}$$

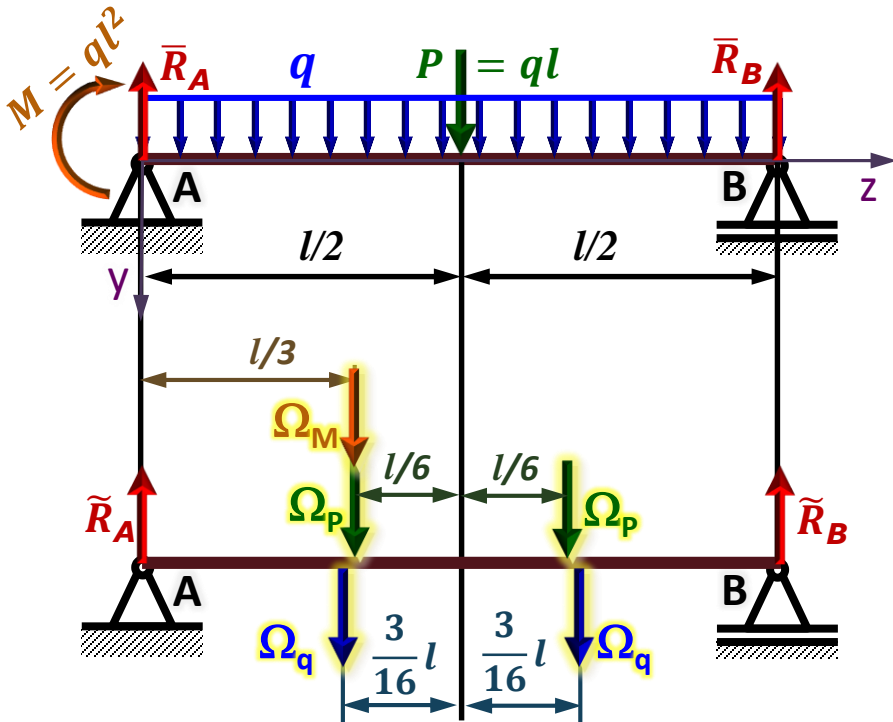


# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

## Przykład 1.3

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).



Dane:  $EJ, q, l$     Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$\sum_{i=1}^n \tilde{F}_{iy} = 0 \Rightarrow \tilde{R}_A - 2\Omega_q - \Omega_M - 2\Omega_p + \tilde{R}_B = 0$$

$$\tilde{R}_A = 2\Omega_q + 2\Omega_p + \Omega_M - \tilde{R}_B \Rightarrow \tilde{R}_A = \frac{21ql^3}{48}$$

4° Ustalanie warunków brzegowych i obciążenia belki fikcyjnej:

Belka rzeczywista	Belka fikcyjna
$\alpha_A \neq 0$ $y_A = 0$ 	$\tilde{T}_A \neq 0$ $\tilde{M}_A = 0$ 

$$\Omega_p = \frac{ql^3}{16}$$

$$\Omega_q = \frac{ql^3}{24}$$

$$\Omega_M = \frac{ql^3}{2}$$

5° Reakcje belki fikcyjnej:  $\sum_{i=1}^n \tilde{M}_{iA} = 0 \Rightarrow$

$$-\Omega_q \frac{5}{16}l - \Omega_M \frac{l}{3} - \Omega_p \frac{l}{3} - \Omega_p \frac{2}{3}l - \Omega_q \frac{11}{16}l + \tilde{R}_B l = 0$$

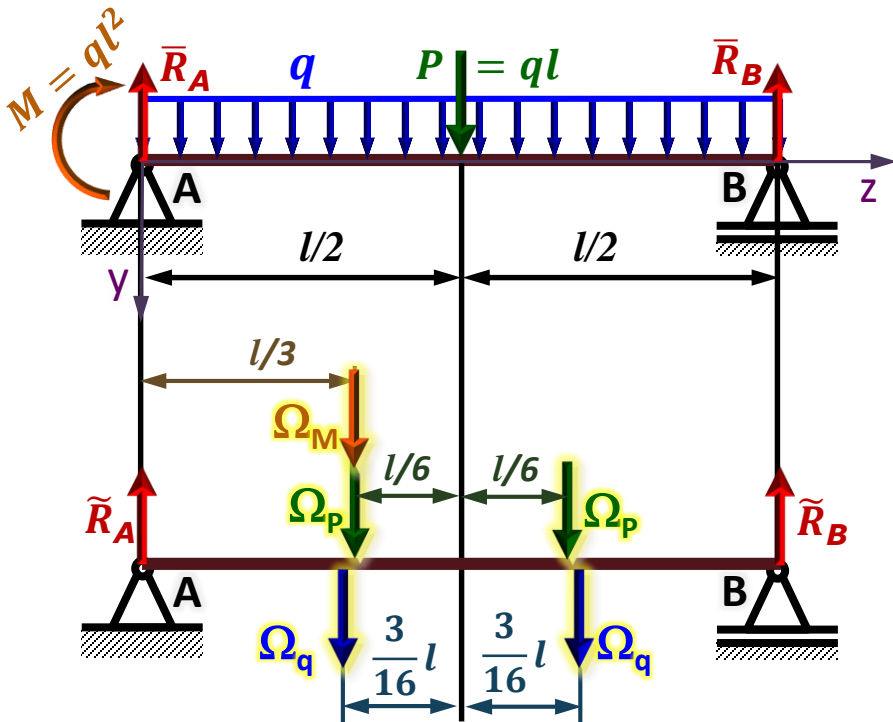
$$\tilde{R}_B = \Omega_q + \Omega_p + \frac{1}{3}\Omega_M \Rightarrow \tilde{R}_B = \frac{13ql^3}{48}$$

# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

## Przykład 1.3

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).

Dane:  $EJ, q, l$  Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$\Omega_p = \frac{ql^3}{16} \quad \Omega_q = \frac{ql^3}{24} \quad \Omega_M = \frac{ql^3}{2}$$

$$\tilde{R}_A = \frac{21ql^3}{48} \quad \tilde{R}_B = \frac{13ql^3}{48}$$

6° Obliczenia kątów obrotu w przekrojach podporowych:

$$\alpha_A = \frac{\tilde{T}_A}{EJ} = \frac{\tilde{R}_A}{EJ} \Rightarrow \alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}$$

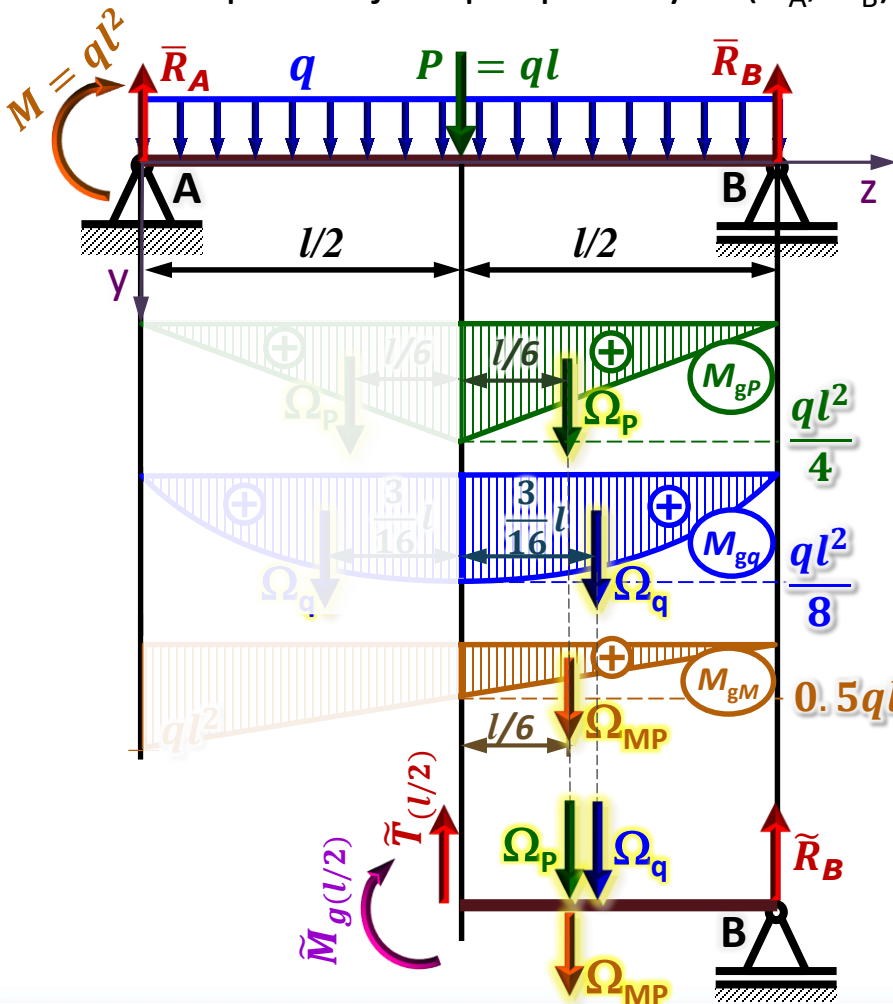
$$\alpha_B = \frac{\tilde{T}_B}{EJ} = -\frac{\tilde{R}_B}{EJ} \Rightarrow \alpha_B = -\frac{13ql^3}{48EJ}$$

(por. z wynikami z wykładu nr 9 z Podstaw wytrzymałości materiałów)

# 1.5. Wyznaczanie odkształceń belek o stałej sztywności - przykłady

**Przykład 1.3** Dane:  $EJ, q, l$  Szukane:  $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

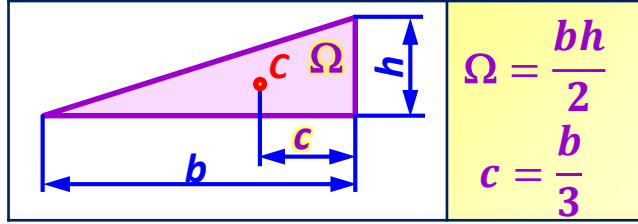
Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie środka belki jak na rysunku ( $y_{(l/2)}$ ) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych ( $\alpha_A, \alpha_B$ ).



$$\Omega_p = \frac{ql^3}{16} \quad \Omega_q = \frac{ql^3}{24} \quad \tilde{R}_A = \frac{21ql^3}{48} \quad \tilde{R}_B = \frac{13ql^3}{48}$$

7° Obliczenia ugięcia środka belki:

$$y_{(l/2)} = \frac{\tilde{M}_{g(l/2)}}{EJ}$$



$$\Omega_{MP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} ql^2 \Rightarrow \Omega_{MP} = \frac{ql^3}{8}$$

$$\tilde{M}_{g(l/2)} = \tilde{R}_B \cdot \frac{l}{2} - \Omega_q \cdot \frac{3l}{16} - \Omega_p \cdot \frac{l}{6} - \Omega_{MP} \cdot \frac{l}{6}$$

$$\tilde{M}_{g(l/2)} = \frac{37ql^4}{384} \Rightarrow \tilde{M}_{g(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}$$

(por. z wynikami z wykładu nr 9 z Podstaw wytrzymałości materiałów)

## 1.6. Odształcenia belek o zmiennej sztywności

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki:

$$EJ\ddot{y} = -M_g(z)$$



$$\ddot{y} = -\frac{M_g(z)}{EJ}$$

### Wnioski:

Odształcenie belki zależy od stosunku  $M_{g(z)}/EJ$ : to znaczy, że jest wprost proporcjonalne do momentu zginającego  $M_g$  i odwrotnie proporcjonalne do sztywności  $EJ$ :

- ⇒ odkształcenie belki w dowolnym przekroju nie ulegnie zmianie, jeśli na żadnym jej odcinku nie zmieni się stosunek  $M_{g(z)}/EJ$ ,
- ⇒ zmiana odkształcenia belki w dowolnym jej przekroju w związku z *n-krotnym wzrostem sztywności ( $EJ$ )* na pewnym odcinku, jest taka sama jak zmiana wywołana *n-krotnym zmniejszeniem momentu zginającego ( $M_g$ )* w obrębie tego samego odcinka.

Stosując metodę obciążeń wtórnych do belek o zmiennej sztywności, należy:

- przyjąć stałą na całej długości *zastępczą sztywność belki fikcyjnej* –  $(EJ)_z$  (zazwyczaj jest to największa sztywność występująca w obrębie belki rzeczywistej:  $(EJ)_z = (EJ)_{max}$ ),
- na kolejnych odcinkach „i”, o sztywnościach belki rzeczywistej  $(EJ)_i$ , przykładać do belki fikcyjnej *zastępcze obciążenie wtórne  $M_{gzi}$* , wynoszące:

$$M_{gzi} = M_{gi} \frac{(EJ)_z}{(EJ)_i}$$

gdzie:

$M_{gi}$  - moment zginający wyznaczony dla odcinka „i” belki rzeczywistej.



AGH

# 1.6. Odkształcenia belek o zmiennej sztywności - przykłady

## Przykład 1.4

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie ( $f_A$ ) oraz kąt obrotu ( $\alpha_A$ ) swobodnego końca belki wspornikowej jak na rysunku.

Dane:  $EJ, P, a$  Szukane:  $f_A, \alpha_A$

1) Rzeczywiste momenty gnące:

$$M_{gA} = 0 \quad M_{gB} = -Pa \quad M_{gC} = -2Pa - 2Pa = -4Pa$$

2) Belka fikcyjna:



sztywność zastępcza:  $(EJ)_z = 2EJ$

3) Obciążenie zastępcze:

$$M_{gzi} = M_{gi} \frac{(EJ)_z}{(EJ)_i}$$

$$\begin{cases} M_{gz}^{A-B} = M_g^{A-B} \frac{2EJ}{EJ} = 2M_g^{A-B} \\ M_{gz}^{B-C} = M_g^{B-C} \frac{2EJ}{2EJ} = M_g^{B-C} \end{cases}$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2Pa$$

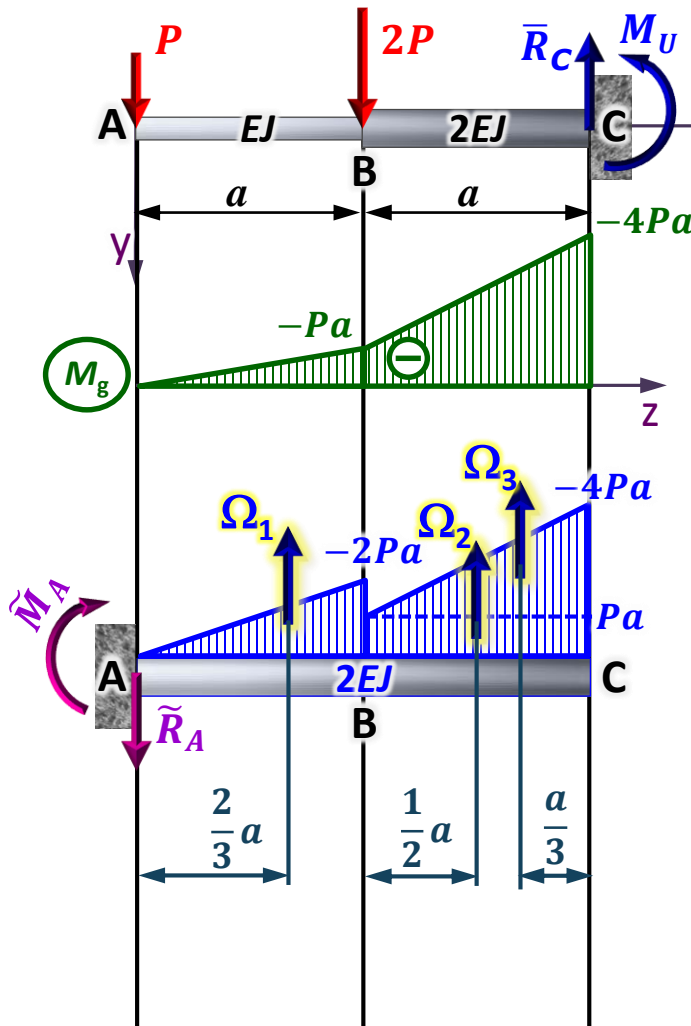
$$\Omega_1 = Pa^2$$

$$\Omega_2 = a \cdot Pa$$

$$\Omega_2 = Pa^2$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3Pa$$

$$\Omega_3 = 1.5Pa^2$$







AGH

# 1.6. Odształcenia belek o zmiennej sztywności - przykłady

## Przykład 1.4

Stosując metodę obciążeń wtórnych obliczyć ugięcie ( $f_A$ ) oraz kąt obrotu ( $\alpha_A$ ) swobodnego końca belki wspornikowej jak na rysunku.

Dane:  $EJ, P, a$  Szukane:  $f_A, \alpha_A$

$$\Omega_1 = Pa^2$$

$$\Omega_2 = Pa^2$$

$$\Omega_3 = 1.5Pa^2$$

$$\alpha_A = \frac{\tilde{T}_A}{(EJ)_z}$$

4) Kąt obrotu swobodnego końca belki:

$$\tilde{T}_A = -(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3) = -(Pa^2 + Pa^2 + 1.5Pa^2)$$

$$\tilde{T}_A = -\frac{7}{2}Pa^2$$

$$(EJ)_z = 2EJ$$

$$\alpha_A = -\frac{7}{4EJ}Pa^2$$

5) Ugięcie swobodnego końca belki:

$$f_A = \frac{\tilde{M}_A}{(EJ)_z}$$

$$\tilde{M}_A = \Omega_1 \cdot \frac{2}{3}a + \Omega_2 \cdot \frac{3}{2}a + \Omega_3 \cdot \frac{5}{3}a$$

$$\tilde{M}_A = \frac{14}{3}Pa^3$$

$$(EJ)_z = 2EJ$$

$$f_A = \frac{7}{3EJ}Pa^3$$

